## **磨尖课05 数列中不等式放缩法的妙用**

放缩法证明数列中不等式，其证明思路是：欲证明，可以将适度压缩，即，只需证明.同理，将适度放大，即，则只需证明.这里的压缩和放大，变化思路多且技巧性强,所以它能够检验学生数学基础知识的掌握程度，也可以很好地检测学生的数学水平.

### **磨尖点一 先放缩成等差或等比通项，再求和放缩**

典例1 已知数列满足，.

（1）证明是等比数列，并求的通项公式.

（2）求证:.

[解析]（1）由得，

因为,所以数列是以为首项，3为公比的等比数列,即,所以.

（2）因为，且当时，，所以，即，所以.



1.不等式证明中的数列求和不能直接求和的，就先放缩，再求和，再放缩证明不等式.这里的放缩技巧是把通项放缩成等差数列或等比数列通项.

2.常用的放缩技巧：.

【注意】从首项开始放缩，若放大（或放小）后的结果与要求证明的结果不一致，则可以调整成前几项不放缩，以此确保得到要求证明的结果.

#### **磨尖训练**

已知数列满足,.

（1） 试判断数列是否为等比数列，并说明理由.

[解析]数列是等比数列，理由如下：

因为，所以，即,

又，所以数列是首项为3,公比为的等比数列.

（2） 设，数列的前项和为，求证：对任意的,.

[解析]由（1）得，即，

又，所以,

则,发现，说明放缩略大了一点，此时调整成前二项不放缩再证明：

当时，，

又因为数列是正项数列，所以是递增数列，即,所以对任意的,.

### **磨尖点二 先放缩成裂项法通项求和，再求和放缩**

典例2 已知数列的前项和为，，.

（1）求的通项公式；

（2）设，数列的前项和为，求证：.

[解析]（1）因为，,所以当时，,解得,

当时，,解得,

当时，, ①

则, ②

由得,则,

所以,即.

（2）由（1）得，

所以当时，;

当时,,

所以,

综上可得，.



常用的放缩技巧如下：

;

;

;

;

.

#### **磨尖训练**

已知正项数列的前项和为，且,.

（1） 求证：数列是等差数列.

[解析]因为，所以当时,,整理得，即是等差数列.

（2） 记数列满足,，求证：.

[解析]令，代入可得，解得或（舍去），即，令,代入,得，再由是等差数列，可得，即，

所以，即，

则，当时，,所以,

由,得.

综上所述，.